ISSN: 2444-250X | ISSN-e: 2444-2887

Propuesta para la enseñanza de las ecuaciones lineales algebraicas

Alberto Sánchez Moreno (autor de contacto)
Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica (Santiago de Querétaro, México)
asanchez@ciidet.edu.mx | https://orcid.org/0000-0002-2520-1402

Raquel Cárdenas Collazo
Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica (Santiago de Querétaro, México)
rcardenas@ciidet.edu.mx | https://orcid.org/0009-0003-1623-0679

Ana Karen Coronel Ruiz
Universidad Tecnológica del Estado de Querétaro (México)
202eaecb.kcr@gmail.com | https://orcid.org/0009-0008-0792-1511

Isaac Hernández Renovato
Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica (Santiago de Querétaro, México)
ihernandez@ciidet.edu.mx | https://orcid.org/0000-0002-0668-8649

Extracto

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es un problema que ha estado presente en todos los niveles educativos, por tanto, la educación secundaria no es la excepción. En este contexto, las investigaciones en matemática educativa han propuesto diferentes estrategias que pretenden mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta área del conocimiento; sin embargo, hasta el momento, difícilmente se podría decir que este problema se ha solucionado, particularmente en México. Esta situación motiva a seguir trabajando en esta dirección con el propósito de ayudar a que cada día más maestros (hombres y mujeres) conozcan recursos didácticos con los que puedan impartir mejores clases de matemáticas en beneficio de sus estudiantes. El presente artículo trata de coadyuvar en lo mencionado, proponiendo una secuencia didáctica para la enseñanza de las ecuaciones lineales algebraicas. La propuesta tiene como componentes fundamentales la historia de las matemáticas y la geometría.

Palabras clave: métodos y estrategias de enseñanza; teoría del aprendizaje y la enseñanza de las ciencias; ecuaciones lineales algebraicas; historia de las matemáticas; aprendizaje; secuencia didáctica; geometría.

Recibido: 30-03-2023 | Aceptado: 19-10-2023 | Publicado: 07-01-2024

Cómo citar: Sánchez Moreno, A., Cárdenas Collazo, R., Coronel Ruiz, A. K. y Hernández Renovato, I. (2024). Propuesta para la enseñanza de las ecuaciones lineales algebraicas. *Tecnología, Ciencia y Educación*, *27*, 187-214. https://doi.org/10.51302/tce.2024.18775

ISSN: 2444-250X | ISSN-e: 2444-2887

Proposal for the teaching of algebraic linear equations

Alberto Sánchez Moreno (corresponding autor)
Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica (Santiago de Querétaro, México)
asanchez@ciidet.edu.mx | https://orcid.org/0000-0002-2520-1402

Raquel Cárdenas Collazo
Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica (Santiago de Querétaro, México)
rcardenas@ciidet.edu.mx | https://orcid.org/0009-0003-1623-0679

Ana Karen Coronel Ruiz
Universidad Tecnológica del Estado de Querétaro (México)
202eaecb.kcr@gmail.com | https://orcid.org/0009-0008-0792-1511

Isaac Hernández Renovato
Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica (Santiago de Querétaro, México)
ihernandez@ciidet.edu.mx | https://orcid.org/0000-0002-0668-8649

Abstract

The teaching and learning of mathematics is a problem that has been present in all educational levels, therefore, secondary education is no exception. In this context, research in educational mathematics has proposed different strategies that aim to improve the teaching-learning process in this area of knowledge; however, up to now it is difficult to say that this problem has been solved, particularly in Mexico. This situation motivates us to continue working in this direction with the purpose of helping more and more teachers (men and women) to learn about didactic resources with which they can teach better mathematics classes for the benefit of their students. This present paper tries to help in this sense by mean a didactic proposal to teach the algebraic linear equation, which has as fundamental components the history of mathematics and geometry.

Keywords: teaching methods and strategies; learning theory and science teaching; algebraic linear equation; history of mathematics; learning; didactic sequence; geometry.

Received: 30-03-2023 | Accepted: 19-10-2023 | Published: 07-01-2024

Citation: Sánchez Moreno, A., Cárdenas Collazo, R., Coronel Ruiz, A. K. and Hernández Renovato, I. (2024). Proposal for the teaching of algebraic linear equations. *Tecnología, Ciencia y Educación*, *27*, 187-214. https://doi.org/10.51302/tce.2024.18775

Sumario

1. Introducción

El sistema educativo mexicano (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017) considera que la aritmética, la geometría y el álgebra son las matemáticas que todo estudiante debe conocer y aprender al término de sus estudios de nivel básico. En México, la educación básica la comprenden los niveles denominados «primaria» y «secundaria», con una duración de seis años el primero y de tres el segundo. En todos estos años, el estudiante cursa de manera obligatoria matemáticas. El objetivo educativo es que al término de la educación primaria el estudiante haya adquirido un pensamiento aritmético adecuado que le posibilite transitar al pensamiento algebraico, que conocerá, aprenderá y ejercitará en la educación secundaria.

La razón de este interés en la educación matemática radica en que unos sólidos conocimientos algebraicos posibilitan al estudiante a cursar matemáticas avanzadas, como la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral, que son la puerta de acceso a una formación que será de suma utilidad en la futura vida profesional del estudiante en todos los aspectos, independientemente de si elige o no una carrera que se considere íntimamente relacionada con las matemáticas, como pueden ser las distintas ingenierías.

Por otra parte, los diferentes estudios acerca de los problemas que existen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a nivel básico, primaria y secundaria (Cedillo Ávalos, 2006; García Zacarías, 2017; Gascón, 2009; Parra Buitrago, 2021), ponen en evidencia que los estudiantes de estos niveles educativos tienen dificultad para desarrollar una base sólida de conocimientos matemáticos básicos, los cuales serán indispensables para que atiendan, de manera adecuada, cursos de matemáticas de nivel medio superior y superior. La dificultad del aprendizaje de las matemáticas trae como consecuencia el alto índice de suspensos, el desinterés por su estudio y la deserción escolar, lo cual impacta en el desarrollo profesional, cultural y tecnológico de cualquier país. Por estas razones, se buscan propuestas educativas en el ámbito de la didáctica de las matemáticas que contribuyan a resolver los problemas de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina.

2. Objetivo

El presente artículo tiene por objetivo presentar una propuesta didáctica para la enseñanza de las ecuaciones lineales algebraicas con el propósito de dar una alternativa didáctica a los profesores de matemáticas de nivel básico (secundaria). La propuesta consiste en una secuencia didáctica que tiene como componentes fundamentales el aprendizaje basado en preguntas (Sánchez Moreno *et al.*, 2020), la historia y la geometría.

Para lograr este objetivo, el artículo está organizado del siguiente modo: en el epígrafe 3 se presenta una breve revisión sobre la historia y la geometría en la enseñanza de las matemáticas; en el epígrafe 4, el fundamento teórico didáctico en el que está enmarcada nuestra propuesta; en el epígrafe 5 se presenta y se ejemplifica nuestra propuesta didáctica con la enseñanza del concepto de «ecuación lineal algebraica»; y, finalmente, el epígrafe 6 se dedica a las conclusiones.

3. La historia y la geometría como recurso didáctico

El uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas ha estado presente durante mucho tiempo (Aranda Plata, 1992; Fried *et al.*, 2009). Conocer la historia de las matemáticas permite entender los problemas y las motivaciones que dieron origen a sus conceptos, la complejidad y dificultad de los problemas que han resuelto, la ilación de ideas en la formulación de teorías y la repercusión y relevancia de dichas ideas hasta nuestros días (González, 2004), es decir, concebirlas como una ciencia que evoluciona. También es evidente que la historia de las matemáticas las sitúa en un contexto social (Ruiz, 2003) y desmitifica el conocimiento y la actividad matemática, situándolas en términos de las personas y circunstancias específicas que las generaron con sus avances, éxitos, crisis y errores. Estas características permiten considerar la historia de las matemáticas como un recurso digno de ser utilizado en la didáctica de esta área del conocimiento. La historia de las matemáticas es un elemento indispensable para mejorar la calidad de la comunicación del conocimiento matemático (González, 2004). Sin embargo, en México, es difícil encontrar en la educación básica una recomendación explícita al uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas (SEP, 2017). Esto se puede deber a factores como una mala preparación del docente en este ámbito o a la burocracia de los sistemas escolares, que otorgan un tiempo insuficiente para cubrir las materias, lo que obliga a sacrificar la historia en aras de cubrir el temario, donde, evidentemente, no se encuentra el aspecto histórico.

La historia también nos dice que la geometría ha sido fundamental para comprender o definir conceptos matemáticos. Como ejemplos, podemos citar los números complejos o los vectores (Zea Saldarriaga, 2012). En este sentido, la geometría puede ser considerada como otro recurso didáctico en la enseñanza de los conceptos matemáticos.

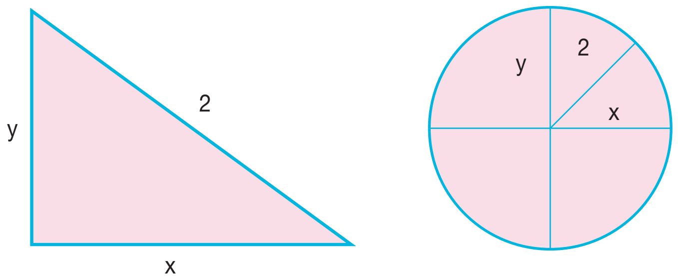
Por otra parte, la naturaleza misma evoca la geometría. La geometría es intrínseca a la naturaleza y, por esa razón, también a los seres humanos. Por tanto, el hombre siempre geometriza. Su cerebro encuentra geometría en los seres vivos, como los caracoles o los nautilus (Miramontes, 1996); en objetos celestes, como las galaxias (González Zacarías *et al.*, 2010), o en las estrellas, al visualizar constelaciones; y en los cristales (Pina, 2014), en los caparazones de tortugas o en los paneles de las abejas (Álvarez-Ríos, 2007), entre otros. En sus labores cotidianas también el hombre manifiesta su pensamiento geométrico en el arte, cuando dibuja o esculpe el mármol, o cuando construye un edificio (Garrido, 2014; Urbano Meneses, 2010).

Por tanto, dada esta característica, no ha de extrañar que sea a través de la geometría que los seres humanos también aprendan, como sucedió en el caso de la gravitación universal, que solo se entendió hasta que se concibió como la curvatura del espacio y el tiempo (Velarde, 2002).

También, la geometría ha estado siempre presente como recurso que coadyuva a comprender mejor los conceptos matemáticos. Como ejemplos podemos citar el concepto de los «números negativos», que adquiere una mayor comprensión cuando se interpretan de manera geométrica (Gallardo y Basurto, 2010), o las funciones trigonométricas seno y coseno, cuya geometría nos permiten entender origen, notación y significado (Ortega Gallegos e Izquierdo Buenrostro, 2018). Con respecto al uso de la geometría en la solución de ecuaciones algebraicas basta citar el libro titulado *Kitā al-jabr wa'lmuqābala*, que se traduce como *Libro de restauración y oposición*, escrito por el matemático árabe al-Khwārizmī en el siglo IX (Puig, 2008). En este libro, en cuyo título se encuentra el origen de la palabra «álgebra» (*al-jabr*), se describe la solución de seis tipos de ecuaciones algebraicas, cinco de ellas de segundo orden (cuadráticas), utilizando cuadrados y rectángulos (Collette, 2000).

En el ámbito de la didáctica, diferentes trabajos en enseñanza de las matemáticas ponen también en evidencia la utilidad del uso de la geometría como recurso didáctico. Esta es la razón por la que ha adquirido relevancia el uso de programas de computadora, cuyo principal objetivo es la visualización de tangentes, vectores, cónicas, poliedros regulares o cualquier tipo de curva (Angulo-Acunso *et al*., 2017; Giandini y Salerno, 2009; Guachún Lucero y Espadero Faicán, 2021; Martin Guillén y Lezcano Rodríguez, 2021; Sánchez-Balarezo y Borja-Andrade, 2022; Zaragoza *et al*., 2006). De esta manera, concebimos la geométrica como una de las representaciones semióticas (Duval,1992) de mayor relevancia en la didáctica de las matemáticas. Esto se confirma al observar que la mayoría de los maestros recurren frecuentemente a la geometría como una alternativa para explicar lo que desean enseñar. Por ejemplo, la expresión algebraica $x^2 + y^2 = 4$ adquiere un mayor significado si se ilustra con un triángulo o un círculo, de acuerdo con el contexto en el que se esté enseñando (véase figura 1).

Figura 1. **Representaciones geométricas de la representación algebraica $x^2 + y^2 = 4$**



Fuente: elaboración propia.

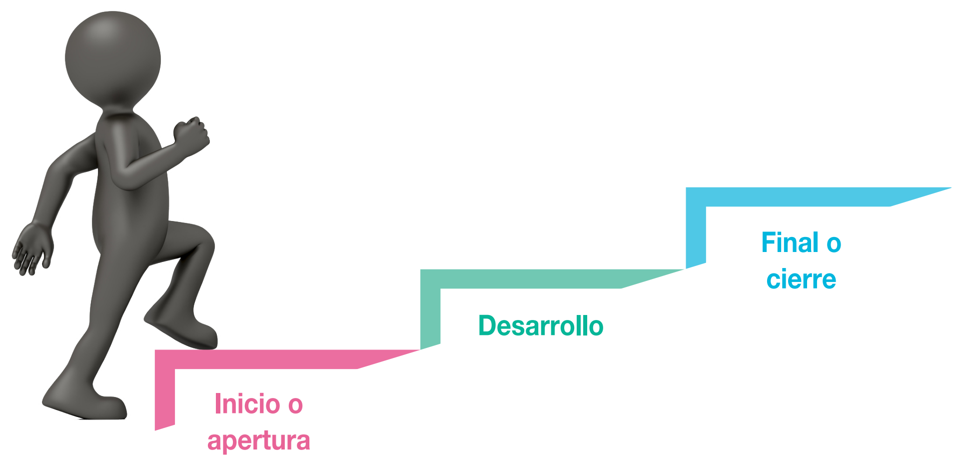
Sin embargo, al igual que ocurre con la historia, la geometría difícilmente se encuentra en el catálogo de recursos didácticos de los docentes de educación básica. Por el contrario, al ser la geometría también matemáticas, se la considera como parte del problema didáctico al que hay que hacer frente en las aulas. En el presente trabajo, tanto la historia como la geometría son consideradas en la propuesta de secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de «ecuación lineal algebraica».

Al igual que ocurre con la historia, la geometría difícilmente se encuentra en el catálogo de recursos didácticos de los docentes de educación básica. Por el contrario, al ser la geometría también matemáticas, se la considera como parte del problema didáctico al que hay que hacer frente en las aulas

4. Marco teórico didáctico

Como se ilustra en la figura 2, una secuencia de enseñanza está conformada por tres momentos: inicio o apertura, desarrollo y final o cierre (D'Hainaut, 1985), sustentada por una planeación didáctica o en una perspectiva teórica sobre el aprendizaje (Frola y Velázquez, 2016).

Figura 2. **Estructura o secuencia didáctica**



Fuente: elaboración propia.

El objetivo de la secuencia didáctica que proponemos en este artículo es contar una guía, a través de una serie de actividades, y un planeamiento eficaz que encamine al aprendizaje deseado. De esta manera, el maestro construirá sus propios modelos de secuencias didácticas considerando las teorías que más le convengan, lo que permitirá establecer su manera particular de enseñanza, integrándola a su práctica docente por medio de las actividades planteadas en el aula.

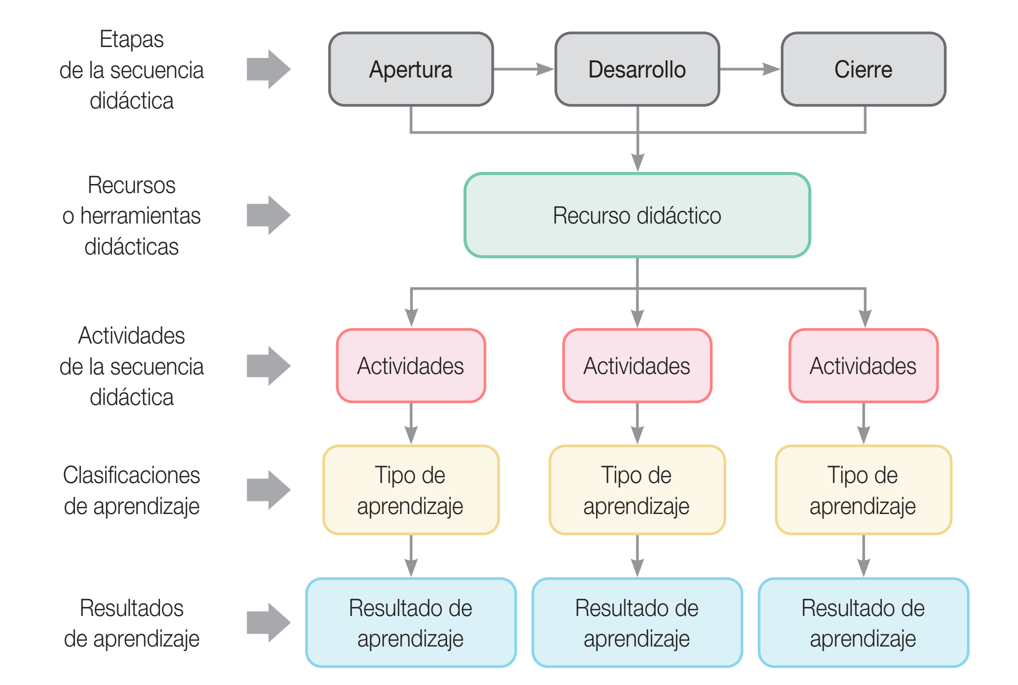
El objetivo de la secuencia didáctica que proponemos en este artículo es contar una guía, a través de una serie de actividades, y un planeamiento eficaz que encamine al aprendizaje deseado. De esta manera, el docente construirá sus propios modelos de secuencias didácticas considerando las teorías que más le convengan, lo que permitirá establecer su manera particular de enseñanza, integrándola a su práctica didáctica por medio de las actividades planteadas en el aula

La estructura didáctica de nuestra propuesta está basada en generar una serie de procesos de aprendizaje (Pozo, 2008; Pozo Municio y Gómez Crespo, 2009) partiendo del programa de estudios y, de esta manera, cumplir con uno de los elementos indispensables en una secuencia didáctica, que es el de conocer el programa al que pertenece la materia, la asignatura, el curso o cualquier otro nombre que el currículo establezca para el trabajo docente.

De acuerdo con Pozo, el aprendizaje se clasifica en cuatro niveles y 12 subniveles jerárquicos (Pozo, 2008) que implican un gradiente de aprendizaje. Uno de estos niveles es el aprendizaje verbal, que está constituido por tres subniveles de aprendizaje que van del asociativo al constructivo: información verbal, conceptos y cambio conceptual. El aprendizaje de información verbal corresponde a los datos y hechos que memorizamos sin que estos tengan algún significado necesariamente. Por ejemplo, se podría saber el algoritmo para calcular la raíz cuadrada de un número, pero se puede desconocer el porqué de este. En el aprendizaje de conceptos se da significado a los hechos o propiedades y estos se relacionan entre sí, incorporándolos a la estructura cognitiva. En este aprendizaje, los símbolos son relacionados con ideas abstractas, lo cual les atribuye un significado más personal. Por ejemplo, el concepto «ecuación lineal» nos permitirá identificar todas aquellas ecuaciones que cumplen con la relación $ax + b$, siendo a y b cantidades constantes y x una cantidad variable. Finalmente, el cambio conceptual involucra una reestructuración de conocimientos, es decir, una modificación de los conceptos que se tienen y los procesos mediante los que se manejan (Pozo, 1999). Para ello se integrarán los viejos conceptos con los nuevos. Por ejemplo, sabemos que «1 elefante + 2 elefantes = 3 elefantes». Este viejo conocimiento relacionado con el álgebra (nuevo conocimiento) nos permite entender la reducción de dos términos semejantes.

Por otra parte, una secuencia didáctica utiliza estrategias basadas en recursos didácticos, los cuales comprenden una serie de actividades cuyo objetivo es impactar en el aprendizaje del estudiante. La figura 3 muestra la estructura de una secuencia didáctica mediante un diagrama de flujo que involucra todos estos componentes. Esta estructura puede ser aplicada a cualquier tema de matemáticas que deseemos enseñar.

Figura 3. **Estructura general de la secuencia didáctica**



Fuente: elaboración propia.

A continuación, desarrollamos las etapas de una secuencia didáctica:

A) Apertura

Las actividades de apertura pueden tener los siguientes objetivos:

- Preparar y alertar al estudiante con respecto a qué y cómo aprender. Esto permitirá que el alumno recuerde o aprenda conceptos previos al conocimiento que se le estará impartiendo.
- Que los alumnos conozcan las circunstancias que rodean su aprendizaje y que generen expectativas adecuadas.
- Que el alumno se motive a estudiar el tema que le será enseñado.

En el caso de las matemáticas, es conveniente utilizar una estrategia didáctica que permita al estudiante recordar y, en su caso, conocer conceptos matemáticos necesarios para abordar el tema que se va a enseñar. Por ejemplo, en el caso del álgebra, dichos conocimientos serían los números reales, las operaciones fundamentales de la aritmética y el concepto de «variable». También resulta importante una breve, pero significativa, presentación histórica acerca de cómo surgió el concepto objeto de enseñanza. Esto, además de la motivación que puede provocar en el estudiante, podría hacer evidente las dificultades o los obstáculos que se han tenido para entender este tema, los cuales, posiblemente, también estén presentes en los estudiantes que recibirán la lección. En este sentido, la etapa de apertura estaría enmarcada en la responsabilidad del docente de impartir correctamente las clases y supervisar el desarrollo adecuado de actividades como la discusión y la reflexión del tema, las tareas y las actividades asignadas y la evaluación del aprendizaje.

B) Desarrollo

La etapa de desarrollo es donde el estudiante va relacionando e interrelacionando las ideas y conceptos para lograr el aprendizaje propuesto. Por ejemplo, en esta etapa se puede hacer uso de las representaciones semióticas (Duval, 2004) y de los ejemplos ilustrativos. Cabe mencionar que, en este momento de la secuencia, el estudiante transitará por el gradiente de aprendizaje. Así, en el caso del aprendizaje verbal, se trabajará a través de las actividades que desarrollarán el docente y sus estudiantes, con las cuales se pretende que aprendan, en un primer momento, información verbal, después conceptos y, finalmente, que alcancen un cambio conceptual (Pozo, 2008; Pozo Municio y Gómez Crespo, 2009). Esto se logrará a través de la incorporación de información a la memoria del estudiante para, posteriormente, alcanzar el aprendizaje de definiciones y el significado de diferentes símbolos, adquiriendo la comprensión de los conceptos, lo que le permitirá darles significado, comprenderlos y aplicarlos; finalmente, la atención a los ejemplos ilustrativos y la resolución de problemas les permitirá cambiar su forma de entender los conceptos, incorporándolos a su nueva forma de pensamiento.

C) Cierre

Las actividades de cierre permiten llevar a cabo una revisión final de la clase, donde se resumen las ideas principales de lo que se enseñó e incluso motivan a los estudiantes para discutir y reflexionar acerca del tema tratado.

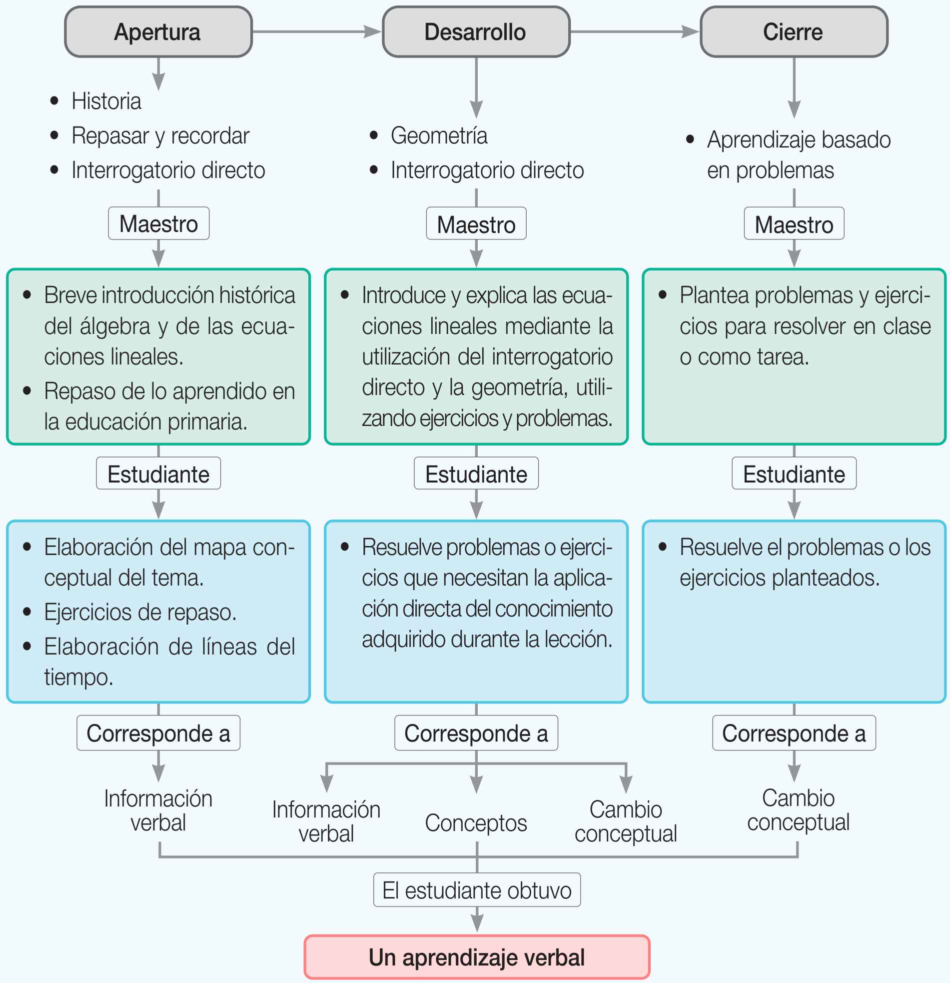
Dichas actividades también permiten resolver problemas que conducen al estudiante a desarrollar un aprendizaje de cambio conceptual o de reestructuración de lo aprendido, ya que construirá nuevas estructuras conceptuales que le permitirán ejercitarse en la integración de sus conocimientos previos con los nuevos que ha aprendido, es decir, aprenderá a tener el control sobre sus propios procesos de aprendizaje con el fin de utilizarlos con un criterio propio. De esta manera, queremos que el estudiante reflexione sobre su propio conocimiento.

En el siguiente epígrafe ejemplificamos nuestra propuesta de estructura de enseñanza con el tema de las ecuaciones lineales algebraicas.

5. Propuesta didáctica aplicada a la enseñanza de las ecuaciones lineales algebraicas

Las ecuaciones lineales algebraicas se enseñan y se estudian en el tercer grado de la educación secundaria (SEP, 2017). En este sentido es necesario considerar como antecedentes los conocimientos adquiridos en la educación primaria.

Secuencia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones lineales algebraicas



Fuente: elaboración propia.

◀

A) Apertura

En esta etapa de la secuencia de enseñanza-aprendizaje se tendrá como objetivo que el estudiante pueda recordar, identificar o definir los conocimientos previos pertinentes al nuevo contenido que aprenderá, además de que, a través de la historia, se motive el interés por este tema. Se propone una exposición breve, pero que motive, de la historia de las ecuaciones lineales algebraicas. En el cuadro I se da un ejemplo de esta afirmación.

Cuadro I. **Actividad de apertura histórica**

Maestro, expresándose verbalmente

Antes de iniciar la clase déjenme platicarles una historia. La historia que les voy a contar se ubica entre los años 323 y 146 a. C. A esta época se la conoce como «helenística». Las fechas corresponden a la muerte de Alejandro III de Macedonia, más conocido como Alejandro Magno (356 a. C.-323 a. C.), y al momento en que Grecia se convierte en una provincia del Imperio romano, respectivamente. Durante este periodo de tiempo se llevó a cabo una recopilación de composiciones poéticas breves conocidas como «epigramas». Esta colección de epigramas dio origen a una obra literaria que lleva el nombre de *Antología palatina*. Los epigramas correspondían a problemas que tenían como propósito poner a prueba el ingenio de quien trataba de resolverlos. Entre este conjunto de enunciados se encuentra uno relacionado con episodios de la vida del matemático griego Diofanto, de quien solo se sabe que vivió en la ciudad egipcia de Alejandría alrededor del año 250 a. C., y cuyo propósito fue descubrir cuántos años vivió este personaje. Sin embargo, en la *Antología palatina*, únicamente se encuentra el enunciado de este problema y no la solución. En la actualidad, la solución a este problema es bien conocida. Esto se debe al conocimiento matemático que poseemos, con el cual podemos traducir el enunciado a una ecuación lineal algebraica, cuya solución aprenderemos en esta clase.

Otra civilización que contempló la idea de ecuaciones fueron los egipcios. Esto se conoce a través del papiro de Rhind, escrito en el año 1650 a. C. En este papiro, de aproximadamente 6 m de largo y 33 cm de ancho se encuentran 87 problemas matemáticos resueltos, que, según su autor, el escriba Ahmes, fueron copiados de un texto que data del año 2000 a. C. En este documento se encuentran problemas relacionados con la aritmética, las fracciones, el cálculo de áreas y volúmenes, las progresiones, los repartos proporcionales, la regla de tres, la trigonometría y las ecuaciones lineales. Con respecto a las ecuaciones lineales podemos encontrar ejemplos de problemas resueltos utilizando ecuaciones lineales, que, con la notación actual, podríamos escribir de la siguiente manera:

$$x + \frac{1}{a}x = b$$

Donde *a* y *b* representan números naturales.

La manera de resolver este tipo de ecuaciones era a través del ensayo y del error.

▶

▶

Otro referente con respecto al uso de las ecuaciones lineales algebraicas son los chinos. Entre sus logros matemáticos se encuentra un método para resolver sistemas de ecuaciones. Este método es un tanto parecido al utilizado hoy en día con un arreglo de números conocido con el nombre de «matrices». Los chinos hacían un arreglo (ordenamiento) con los factores de las ecuaciones y mediante operaciones de resta entre las columnas del arreglo lograban simplificar el sistema, de tal manera que una de las incógnitas era encontrada, lo que traía como consecuencia conocer las otras.

La historia de las ecuaciones tiene sus inicios cuando las primeras civilizaciones empezaron a desarrollar el lenguaje simbólico de la aritmética y el álgebra. Esto se entiende porque las civilizaciones primitivas solo tenían la necesidad de realizar operaciones simples que involucraban la suma, la resta y la multiplicación. Las ecuaciones empezaron a surgir cuando las grandes civilizaciones comenzaron a desarrollar la ingeniería y la astronomía y tuvieron la necesidad de realizar complicados cálculos.

Fuente: Estrada Analco (2018), Galán Vioque (2004), García Peña y García Castillo (2020), Morales Peral (2002), Puig (2006) y Trujillo Tovar y Martínez Trujillo (2010).

Otra posibilidad para esta etapa de la secuencia didáctica es dar un repaso de lo aprendido en la educación primaria, donde implícitamente se empieza a trabajar con las ecuaciones lineales algebraicas a través de ejercicios aritméticos. Esto se puede realizar de la siguiente manera: se solicita a los estudiantes determinar cierto número para que se cumpla la ecuación correspondiente, como se muestra en la figura I (a). En este tipo de ejercicios el espacio juega el papel de incógnita.

Figura I. **Ejercicios aritméticos que implícitamente enseñan el concepto de «variable»**

a) Determine el número que hay que colocar en el cuadro para que se cumpla cada una de las operaciones.

$5 + \boxed{} = 12$

$3 - \boxed{} = 1$

$\boxed{} \times 8 = 40$

$\boxed{} \div 4 = 7$

b) Determine el valor de la letra para que se cumpla cada una de las operaciones.

$5 + \boxed{n} = 12$

$3 - \boxed{z} = 1$

$\boxed{w} \times 8 = 40$

$\boxed{y} \div 4 = 7$

Fuente: elaboración propia.

Repasando y recordando este tipo de ejercicios, implícitamente se está iniciando al estudiante en el álgebra. El siguiente paso es repetir los mismos ejercicios, pero ahora, en lugar del espacio cuadrado, colocaremos una línea. El estudiante debería ser capaz de darse cuenta de que el ejercicio es idéntico al anterior y de que solamente se ha sustituido el espacio por una letra, de donde inferirá que el valor de esa letra es el número que previamente ha encontrado. Este aprendizaje conductista (Leiva, 2005) le hará entender que los números pueden ser representados por símbolos literales (por letras). La figura I (b) ilustra esta situación. Otra forma de intervención didáctica en la apertura de la secuencia de aprendizaje podría consistir en un interrogatorio directo, donde el maestro, a través de preguntas, haga evidente la conceptualización de la variable. En los cuadros II y III podemos ver dos ejemplos.

Cuadro II. **Ejemplo de preguntas para comprender el concepto de «variable»**

Maestro (escribiendo en la pizarra y expresándose verbalmente)	Consideremos el siguiente ejercicio de la escuela primaria: $5 + \_\_\_\_ = 12$ ¿Qué número hay que poner sobre la línea para que al sumarlo a 5 nos dé como resultado 12?
Alumno (escribiendo en la pizarra)	7
Maestro (expresándose verbalmente)	Cierto, 5 + 7 da como resultado 12.
Maestro (expresándose verbalmente y escribiendo en la pizarra)	Hagamos otro ejercicio, poniendo *n* en vez de la línea. ¿Qué número debe representar *n* para que sumándolo a 5 dé como resultado 12?
Alumno (contestando por analogía)	El valor de *n* debe ser 7 porque 5 + 7 = 12.
Maestro (expresándose verbalmente)	¿Qué puede concluir de este ejercicio?
Alumno (contestando por deducción)	Que $n = 7$.
Maestro (expresándose verbalmente)	Excelente respuesta. El número 7 puede ser representado por la letra *n*.

Fuente: elaboración propia.

Cuadro III. **Ejemplo de preguntas para comprender el concepto de «variable»**

Maestro (escribiendo en la pizarra y expresándose verbalmente)	Consideremos ahora otro ejercicio: $\_\_\_ \times 8 = 40$ ¿Qué número hay que poner sobre la línea para que al multiplicarlo por 8 nos dé 40?

◀

◀

Alumno (escribiendo en la pizarra)	5
Maestro (expresándose verbalmente)	Cierto, 5 × 8 da como resultado 40.
Maestro (expresándose verbalmente y escribiendo en la pizarra)	Procedamos como en el ejercicio anterior. Pongamos *n* en vez de la línea. ¿Qué número debe representar *n* para que multiplicado por 8 dé como resultado 40?
Alumno (contestando por analogía)	El valor de *n* debe ser 5 porque 5 × 8 = 40.
Maestro (expresándose verbalmente)	¿Qué puede concluir de este ejercicio?
Alumno (contestando por deducción)	Que *n* = 5.
Maestro (expresándose verbalmente)	Excelente respuesta. El número 5 puede ser representado por la letra *n*. ¿Qué puede concluir de este par de ejercicios que hemos realizado?
Alumno (contestando por reestructuración de lo aprendido)	Que la letra *n* puede ser 7 o 5.
Maestro (expresándose verbalmente)	Muy bien. La letra *n* puede representar cualquier número dependiendo de la operación donde se encuentre. En nuestro caso, primero fue una suma y después una multiplicación. Por eso la llamamos «variable».

Fuente: elaboración propia.

De esta manera, mediante interrogatorio, el maestro enseña el concepto de «variable» como número y como incógnita.

Una vez que se hayan puesto suficientes ejemplos para cumplir el objetivo de enseñanza y que el estudiante haya realizado ejercicios por su cuenta a través de tareas, estará preparado para incursionar en la etapa de desarrollo.

B) Desarrollo

En esta etapa se buscarán los aprendizajes de información verbal, de conceptos y de cambio conceptual mediante la memorización, los registros de representación semiótica y los ejemplos ilustrativos. El objetivo para esta etapa de la secuencia didáctica es que el estudiante entienda el significado de los conceptos a partir de lo que se le ha enseñado en la etapa de apertura, que organice la nueva información en diferentes

▶

◀

representaciones (verbal, simbólica y geométrica), que almacene la nueva información en su memoria de largo plazo y que a los conceptos aprendidos les atribuya significado, interpretándolos en el contexto de las matemáticas.

A continuación, presentamos la manera en la que proponemos que el maestro lleve a cabo la etapa de desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones algebraicas lineales.

Después de haber superado con éxito la etapa de apertura correspondería enseñar a los alumnos a razonar con incógnitas. Esto se puede llevar a cabo mediante la ejercitación de problemas verbales (Karplus, Pulos y Stage, 1981) como el siguiente:

> Juan pensó en un número, le agregó 10, multiplicó el resultado por 2 y obtuvo 24. ¿Cuál es el número que pensó?

De acuerdo con Karplu *et al.* (1981), el estudiante resolverá el problema mediante un proceso de ensayo y error a partir del resultado que da el problema. Sin embargo, consideramos que este tipo de actividad puede ser significativa si se considera una traducción inmediata al registro de representación algebraico mediante la intervención docente, esto es, una vez que el alumno haya reflexionado acerca de cómo obtuvo el resultado, entonces el docente procederá a indicarle cómo se traduce este en términos de las variables. En el ejemplo mencionado la traducción sería:

$$2\,(x + 10) = 24$$

Equivalentemente:

$$2x + 20 = 24$$

En este punto habría que mencionarle al alumno que todas las expresiones de estas características se denominan «ecuaciones lineales algebraicas», es decir, ecuaciones donde la incógnita, en este caso *x*, solo aparece multiplicada por números y no por sí misma.

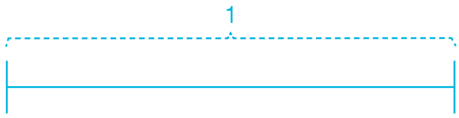
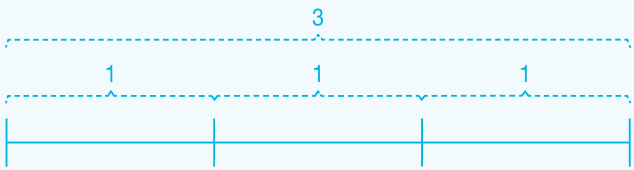
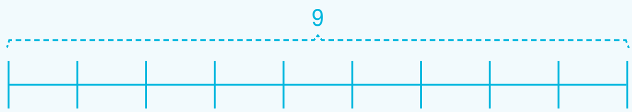
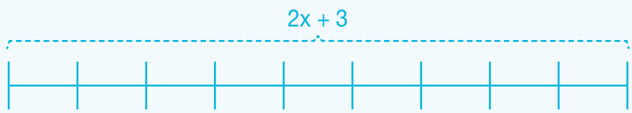
Finalmente, en el cuadro IV se utiliza la geometría como herramienta didáctica, también mediante interrogatorio directo (aprendizaje basado en preguntas).

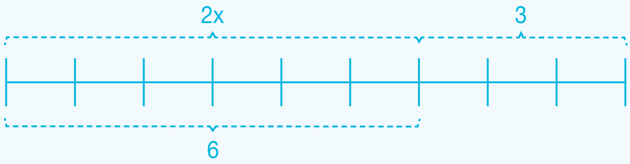
Cuadro IV. **Geometría como herramienta didáctica**

Maestro	Consideremos el siguiente problema: encontrar el valor de la variable *x* para que se cumpla la ecuación $2x + 3 = 9$. ¿Cómo llamamos a esta expresión matemática?
Alumno (dirigiéndose al maestro)	Una ecuación lineal algebraica.
Maestro (escribiendo en la pizarra)	Muy bien, ahora, consideren como unidad un segmento de recta, esto quiere decir:

▶

▶

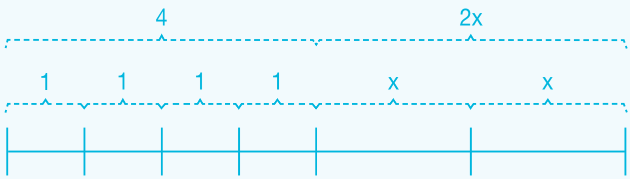
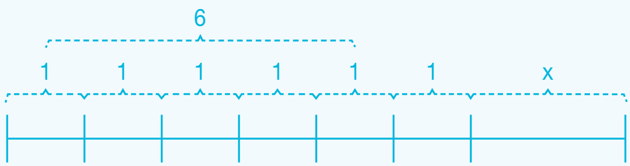
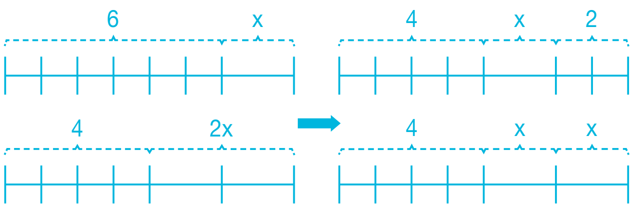
Maestro (escribiendo en la pizarra) *(cont.)*	 El segmento representa al número 1. ¿Cómo representaríamos el número 3?
Alumno (contestando por analogía y escribiendo en la pizarra)	
Maestro	Se unen tres segmentos. Esa es la representación geométrica del número 3. Ahora volvamos a nuestro problema. ¿Cómo representaríamos el número 9?
Alumno (dibujando y escribiendo en la pizarra)	
Maestro	Excelente. Ahora, recuerde que el símbolo = indica que lo que se encuentra a ambos lados de él tiene igual valor. Entonces, ¿cuál sería la representación geométrica de la cantidad $2x + 3$?
Alumno (dibujando y escribiendo en la pizarra)	El segmento de 9 unidades será igual a la cantidad $2x + 3$. 
Maestro	Estoy de acuerdo con usted. Como cada segmento de recta es la unidad, esta gráfica se puede poner como:  ¿Cuántas unidades le corresponden a $2x$?

Alumno (contestando por comparación y dibujando en la pizarra)	Le corresponderían 6 unidades. 
Maestro	Correcto: $2x = 6$. Finalmente, ¿cuál es el valor de la variable x para que al multiplicarla por 2 dé como resultado 6?
Alumno (contestando, teniendo en cuenta sus conocimientos previos [aritmética])	El valor sería 3: $x = 3$
Maestro	Excelente. La solución de la ecuación lineal $2x + 3 = 9$ es: $x = 3$

El desarrollo de la clase puede continuar adelante, de manera que el estudiante realice el mayor número posible de ejercicios parecidos a este hasta que los domine. Después, el maestro planteará un caso de mayor dificultad, como el que se puede ver en el cuadro V.

Cuadro V. **Diálogo maestro-alumno**

Maestro	Ahora que ya dominamos este tipo de ejercicios, intentemos resolver uno de mayor dificultad: encontrar el valor de la variable x para que se cumpla la ecuación $4 + 2x = 6 + x$. ¿Cómo llamamos a esta expresión matemática?
Alumno (dirigiéndose al maestro)	Esta es una expresión más complicada, pues la incógnita aparece en dos de los términos de la ecuación; sin embargo, observo que en ambos casos solo está multiplicada por números, por tanto, cumple con la definición vista de «ecuación lineal algebraica». ¿Estoy en lo cierto?
Maestro (escribiendo en la pizarra)	Es correcto. Es una ecuación lineal algebraica. Ahora, consideren como unidad un segmento de recta y otro segmento de longitud desconocida x. Esto quiere decir:

Maestro (escribiendo en la pizarra) *(cont.)*	 Estos segmentos representan el número 1 y la incógnita, respectivamente. ¿Cómo representaríamos el segmento 4 + 2*x*?
Alumno (recordando y escribiendo en la pizarra su respuesta obtenida por analogía)	
Maestro	Se unen 4 segmentos de valor 1. Esa es la representación geométrica del número 4. Y se unen 2 segmentos de valor *x*. Esa es la representación geométrica de 2*x*. Ahora, ¿cómo representaríamos el segmento 6 + *x*?
Alumno (dibujando y escribiendo en la pizarra)	
Maestro (expresándose verbalmente y escribiendo en la pizarra)	Muy bien. Ahora, comparemos ambas representaciones geométricas de la siguiente forma:  ¿Qué se puede concluir de esta comparación?
Alumno (dibujando y escribiendo en la pizarra)	Ahora veo qué segmento de *x* debe tener un valor de 2 unidades, es decir: $x = 2$

◀

◀

Maestro	Excelente, la solución de la ecuación lineal algebraica $4 + 2x = 6 + x$ es: $x = 2$

Habrá que continuar realizando más ejercicios de este tipo hasta que el estudiante domine la técnica. De esta manera, aprenderá qué es una ecuación lineal algebraica y cómo resolverla por un método geométrico.

En esta etapa del desarrollo se han utilizado registros de representación verbal, simbólico y geométrico que han permitido al estudiante obtener un aprendizaje de información verbal, de conceptos y de cambio conceptual. Al incorporar a su memoria el procedimiento enseñado logrará la comprensión de la solución de una ecuación lineal algebraica, a la que le atribuirá significado, ya que, al entender los ejemplos ilustrativos, podrá construir nuevas estructuras conceptuales integrando sus conocimientos anteriores con los nuevos que se le han enseñado.

C) Cierre

La etapa de cierre de nuestra propuesta de enseñanza-aprendizaje del concepto de «ecuación lineal algebraica» tiene por objetivo el aprendizaje de cambio conceptual o la reestructuración de lo aprendido. Nuevamente, en esta etapa se recurre a los problemas y se desea que el estudiante sea capaz de aplicar significativamente el conocimiento aprendido en las etapas anteriores de la secuencia didáctica. Si el estudiante cumple con éxito este momento de la secuencia de enseñanza-aprendizaje, podemos decir que ha adquirido todos los niveles de aprendizaje que marca la taxonomía de Pozo (2008), que son:

- **Físico.** Adquirirá información sobre la estructura conceptual del tema a través de su memoria y de la cognición, que le permitirá comprender los conceptos estudiados. En este caso, el concepto de «ecuación lineal algebraica».
- **Informativo.** Adquirirá conocimiento y registrará cambios significativos en su entendimiento de «variable» y «ecuación lineal algebraica» a través de la práctica y el aprendizaje significativo, lo que reducirá su incertidumbre acerca de lo estudiado. También, utilizará su memoria para almacenar o registrar esos cambios, y, por tanto, cualquier estado presente será una huella de lo sucedido en el pasado, por lo que puede interpretarse en función de su pasado.
- **Representacional.** Utilizará la información para elaborar representaciones semióticas, estableciendo una estrategia de solución del entorno teórico al que se enfrentará para resolver los problemas que se le plantearán.

De esta manera esperamos que su aprendizaje surja de esta reorganización jerárquica. Nuestra propuesta considera que esta etapa de la secuencia de enseñanza-aprendizaje implica que el estudiante tenga control sobre sus propios procesos de aprendizaje, que es equivalente al aprendizaje significativo que tanto se anhela en la didáctica de las matemáticas, y, por tanto, lo podrá utilizar a su mejor entender y parecer, controlando y regulando sus procesos cognitivos, así como habituándose a reflexionar sobre su propio conocimiento.

Los siguientes problemas son ejemplos de la actividad de cierre.

▶

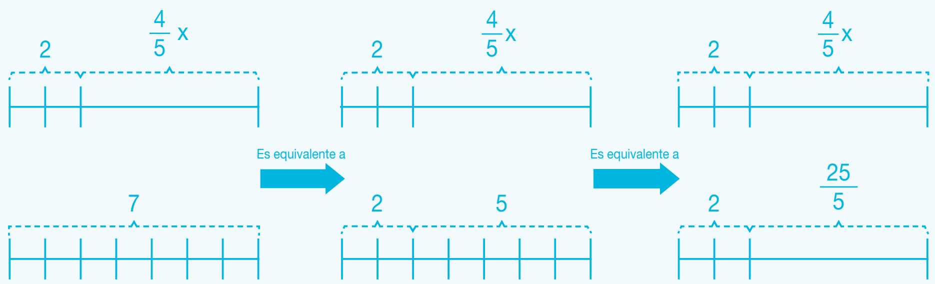
Problema 1

Las investigaciones encontraron que el alcohol diluido en agua al 60 % es la fórmula más eficaz para desactivar el coronavirus (COVID-19). Si se tienen 10 litros de una mezcla de agua y alcohol, donde el 20 % de la mezcla corresponde a alcohol, ¿cuántos litros de líquido se deberán extraer para obtener el porcentaje de alcohol sugerido para contrarrestar el virus?

El planteamiento para la solución de este problema llevará a la ecuación lineal algebraica:

$$2 + \frac{4x}{5} = 7$$

Donde *x* representa el número de litros que se van a retirar de la mezcla. La solución esperada se ilustra a continuación:



Comparando los segmentos se observa que:

$$\frac{4}{5}x = \frac{25}{5} \xrightarrow{\text{Es equivalente a}} \frac{1}{5} \times 4x = \frac{1}{5} \times 25 \xrightarrow{\text{Es equivalente a}} 4x = 25$$

¿Qué cantidad debemos multiplicar por 4 para obtener 25? **Respuesta:** $\frac{25}{4}$

Entonces: $x = \frac{25}{4} \xrightarrow{\text{Es equivalente a}} x = 5 \times \frac{5}{4}$

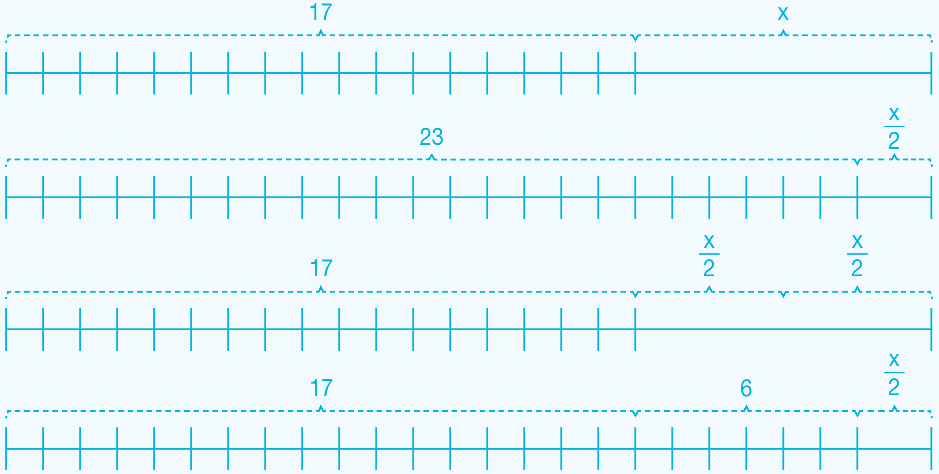
Conclusión. Se deben retirar 5 litros y 5/4 de la mezcla.

Problema 2

Juan tiene 46 años y Margarita 17. ¿Dentro de cuantos años Margarita tendrá la mitad de años que Juan? El planteamiento para la solución de este problema llevará a la ecuación lineal algebraica siguiente:

$$17 + x = 23 + \frac{x}{2}$$

Donde *x* representa los años que faltan para que Margarita tenga la mitad de los años que Juan. La solución esperada se ilustra a continuación:



Comparando los segmentos se observa que $\frac{x}{2} = 6$.

¿Qué cantidad debemos dividir entre 2 para obtener 6? **Respuesta:** 12

Entonces: $x = 12$

Conclusión. Dentro de 12 años Margarita tendrá la mitad de años que Juan.

Problema 3

Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto. Es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. ¿De qué edad murió Diofanto? (Puig, 2006).

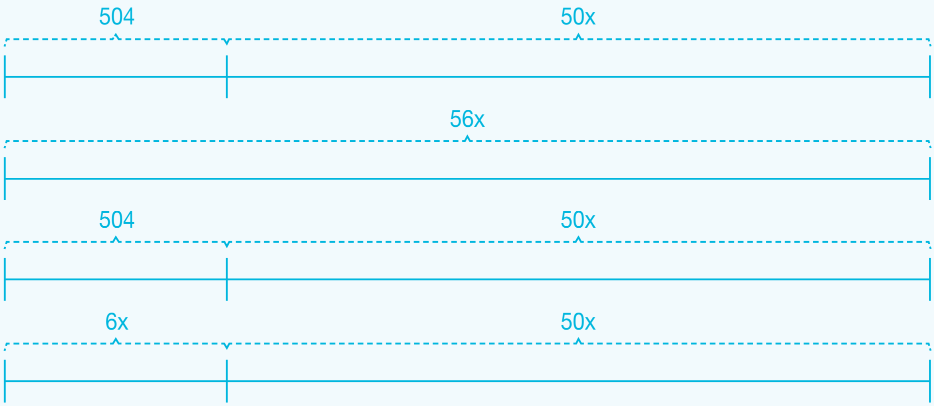
El planteamiento para la solución de este problema llevará a la ecuación lineal algebraica siguiente:

$$50x + 504 = 56x$$

◄

◄

Donde *x* representa la vida de Diofanto. La solución esperada se ilustra a continuación:



Comparando los segmentos se observa que 6*x* = 504.

¿Qué cantidad debemos multiplicar por 6 para obtener 504? **Respuesta:** 84

Entonces: x = 84

Conclusión. Diofanto vivió 84 años.

Fuente: elaboración propia.

6. Conclusiones

Las matemáticas son parte del conocimiento humano, razón suficiente para aprenderlas y enseñarlas, pero, además, son muy útiles, lo que las vuelve aún mucho más importantes. En este sentido, pensamos que cualquier intento por contribuir a su proceso de enseñanza-aprendizaje será bien recibido. El trabajo aquí presentado pretende contribuir en esta dirección. Por otra parte, dado el carácter jerárquico de las matemáticas (un concepto se construye sobre otro), resulta importante atender la problemática de su didáctica desde los niveles educativos básicos, que, en el caso de México, corresponden a los niveles de primaria y secundaria. En el caso de la educación secundaria, podemos decir que el problema fundamental al que se enfrentan los estudiantes es el de superar la transición del pensamiento

> Las matemáticas son parte del conocimiento humano, razón suficiente para aprenderlas y enseñarlas, pero, además, son muy útiles, lo que las vuelve todavía mucho más importantes

aritmético (adquirido en educación primaria) al pensamiento algebraico. Considerando que la historia nos indica que la geometría ha sido un recurso que ha permitido la comprensión de conceptos tanto físicos como matemáticos, en este trabajo se hace uso de esta representación matemática para la enseñanza de las ecuaciones lineales.

En el caso de la educación secundaria, podemos decir que el problema fundamental al que se enfrenta el alumnado es el de superar la transición del pensamiento aritmético (adquirido en educación primaria) al pensamiento algebraico

En este trabajo hemos presentado una propuesta didáctica para la enseñanza de las ecuaciones lineales algebraicas para la educación secundaria en México. La secuencia didáctica presentada utiliza como recursos didácticos la historia, la geometría, la enseñanza basada en preguntas (diálogo maestro-alumno) y los problemas. Mediante esta propuesta se pretende alcanzar un aprendizaje verbal, de acuerdo con la taxonomía de Pozo (2008), para lo cual cada una de las actividades propuestas para el docente y el alumno contribuyen al aprendizaje en los tres niveles: verbal, conceptual y de cambio conceptual.

Consideramos que un parte importante de esta propuesta es el uso del aprendizaje basado en preguntas, establecido como un diálogo entre el alumno y el maestro, donde el docente guía al estudiante hacia su propio aprendizaje. En este sentido, la propuesta se encuentra inmersa en el constructivismo (Araya *et al*., 2007; Ortiz Granja, 2015) y coadyuva al tan ansiado aprendizaje significativo (Moreira, 2012, 2017). Por otra parte, la geometría se encuentra en el marco de la teoría de las representaciones semióticas (Duval, 2006), la cual nos dice que un concepto matemático no es tangible y, por tanto, solo se puede conocer a través de construcciones de sistemas de expresión y representación como son los símbolos matemáticos, las gráficas, el diagrama o los esquemas (Duval, 1999). Estas tienen como propósito la comunicación y el entendimiento de los conceptos. En este sentido, nuestra propuesta hace uso de la representación geométrica (en particular, del segmento de recta), de la representación simbólica (al expresar algebraicamente la ecuación lineal) y de la representación numérica.

Consideramos que un parte importante de esta propuesta es el uso del aprendizaje basado en preguntas, establecido como un diálogo entre alumnado y profesorado, donde el docente guía al estudiante hacia su propio aprendizaje

Nuestra propuesta didáctica pretende contribuir al cambio conceptual del estudiante al considerar como actividad de cierre de la secuencia didáctica la solución de problemas, ya que, para llevar a cabo esta actividad, el estudiante debe aplicar significativamente su conocimiento previo –la aritmética, en el caso de las ecuaciones lineales algebraicas–, junto con el conocimiento aprendido en las etapas anteriores de la secuencia didáctica.

Por otra parte, en la didáctica de las matemáticas es importante tener claro a dónde se quiere llegar en el proceso de generación de aprendizaje. En este sentido, las diferentes taxonomías constituyen una alternativa que se ha de considerar (Atonal Gutiérrez, 2020).

En este trabajo presentamos una secuencia didáctica que cumple con los subniveles jerárquicos del nivel de aprendizaje verbal de la taxonomía de Pozo (2008), dado que consideramos que esta taxonomía es la que mejor se adapta a la didáctica de las matemáticas. En este sentido, si el estudiante cumple con éxito la secuencia didáctica propuesta, alcanzará el aprendizaje significativo del concepto de «ecuaciones lineales algebraicas».

Este trabajo trató de mostrar la importancia que tiene la historia y la geometría en la enseñanza de las matemáticas, así como la necesidad de incorporar los resultados de aprendizaje en una secuencia didáctica, de tal manera que esta pueda impactar en el aprendizaje significativo de los estudiantes de matemáticas de nivel secundaria.

Referencias bibliográficas

Álvarez-Ríos, Y. (2007). La geometría de las formas de la naturaleza. *TecnoLógicas*, *18*, 103-136.

Angulo-Acunso, K. N., Maldonado-Ibarra, G. E., Ochoa-González, F. A., Santos-Cedeño, F. H. y Reyes-Castillo, W. B. (2017). Softwares matemáticos para el aprendizaje. *Polo del Conocimiento* (Ed. núm. 14), *2*(12), 102-112.

Aranda Plata, A. (1992). Informe sobre el VII Congreso Internacional de Educación Matemática. Quebec. *Epsilon. Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»*, *24*, 111-126.

Araya, V., Alfaro, M. y Andonegui, M. (2007). Constructivismo: orígenes y perspectivas. *Laurus*, *13*(2), 76-92.

Atonal Gutiérrez, T. (2020). La aplicación de taxonomías en los procesos de aprendizaje. *Sinergias Educativas*, *5*(2), 1-15.

Caivano, J. L. (2005). Semiótica, cognición y comunicación visual: los signos básicos que construyen lo visible. *Semiótica de lo visual. Tópicos del Seminario*, *13*, 113-115.

Cedillo Ávalos, T. E. (2006). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *11*(28), 129-153.

Cobb. P., Yackel, E. y McClain, K. (Eds.). (2000). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*. Laurence Erlbaum.

Collette, J. P. (2000). *Historia de las matemáticas* (4.ª ed.). Siglo XXI.

D'Hainaut, L. (1985). *Objetivos didácticos y programación. Análisis y construcción de currículums, programas de educación objetivos operativos y situaciones didácticas*. Oikos Tau.

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En R. Cambray, E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Antología en educación matemática*. Sección de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Estrada Analco, J. M. (2018). El papiro del Rhind. *Revista de Artes y Humanidades*, *4*(7), 24-33.

Fried, M. N., Menghini, M., Furinghetti, F., Giacardi, L. y Azarello, F. (Eds.). (2009). The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008): reflecting and shaping the world of mathematics education. *ZDM. Mathematics Education*, *41*(4), 521-524. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0186-4

Frola, P. y Velásquez, J. (2016). *Cómo elaborar un proyecto de enseñanza*. Frovel Educación.

Galán Vioque, G. (Trad.). (2004). *Antología palatina II: la guirnalda de Filipo*. Editorial Gredos.

Gallardo, A. y Basurto, E. (2010). La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros. *Relime*, *13*(4), 255-268.

García Peña, I. y García Castillo, P. (2020). *Materiales didácticos de filosofía helenística*. Ediciones Universidad de Salamanca.

García Zacarías, B. E. (2017). *Aspectos metodológicos y contextuales presentes en la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria* (Tesis de licenciatura). Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México.

Garrido, S. (2014). Arte geométrico como fundamentos conceptual, proyectual y estético en diseño contemporáneo. *Convergencias. Revista de Invesgação e Ensino das Artes*, *7*(14).

Gascón, J. (2009). El problema de la educación matemática entre la secundaria y la universidad. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *11*(2), 273-302.

Giandini, V. H. y Salerno, M. N. (2009). La geometría, los ingresantes y el software Maple. *Formación Universitaria*, *2*(4), 23-30.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA*, *45*, 17-28.

González Zacarías, C., Palomino Ovando, M. A. y Cocoletzi, G. H. (2010). Los números de Fibonacci en la naturaleza y los sistemas nanoestructurados artificiales. *Mundo Nano*, *3*(1), 15-28.

Guachún Lucero, P. y Espadero Faicán, G. (2021). El software GeoGebra como recurso para la enseñanza de vectores: una experiencia didáctica. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, *16*(37), 46-60.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E.K. (1981). Early adolescents reasoning with unknowns. *Proceedings of the Fifth PME Conference, Grenoble, Francia* (pp. 147-152).

Leiva, C. (2005). Conductismo, cognitivismo y aprendizaje. *Tecnología en Marcha*, *18*(1), 66-76.

Martin Guillén, Y. y Lezcano Rodríguez, L. E. (2021). El GeoGebra en la clase de matemática de la enseñanza media desde los móviles. *Varona*, *73*.

Miramontes, P. (1996). La geometría de las formas vivas. *Ciencias*, *42*, 12-19.

Morales Peral, L. (2002). Las matemáticas en el antiguo Egipto. *Apuntes de Historia de las Matemáticas*, *1*(1), 5-12.

Moreira, M. A. (2012). ¿Al final, qué es aprendizaje significativo? *Revista Qurriculum*, *25*, 29-56.

Moreira, M. A. (2017). Aprendizaje significativo como un referente para la organización de la enseñanza. *Archivos de Ciencias de la Educación*, *11*(12), 1-16.

Ortega Gallegos, K. A. e Izquierdo Buenrostro, G. N. (2018). Algunos aspectos históricos de las funciones seno y coseno. *Mixba'al. Revista Metropolitana de Matemáticas*, *9*(1), 13-26.

Ortiz Granja, D. (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, *19*, 93-110.

Oviedo, L. M. y Kanashiro, A. M.ª. (2012). Los registros semióticos de representación en matemáticas. *Revista Aula Universitaria*, *13*, 29-36.

Parra Buitrago, E. Y. (2021). *¿Por qué a muchos estudiantes se les dificulta aprender matemáticas, en el nivel secundaria?* (Tesis de licenciatura). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Pina, C. M. (2014). Los fundamentos de la cristalografía: una reseña histórica. *Anales de Química*, *110*(4), 294-302.

Pozo, J. I. (1999). *Aprendices y maestros: la nueva cultura del aprendizaje*. Alianza Editorial.

Pozo, J. I. (2008). *Aprendices y maestros: la psicología cognitiva del aprendizaje*. Alianza Editorial.

Pozo Municio, J. I. y Gómez Crespo, M. Á. (2009). *Aprender y enseñar ciencia* (6.ª ed.). Ediciones Morata.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En J. V. Aymerich y S. Macario (Eds.), *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57). Publicacions de la Universitat Jaume I.

Puig, L. (2008). Historias de al-Khwāzmī (2.ª entrega): los libros. *SUMA*, *59*, 105-112.

Radford, L. (2006). Introducción semiótica y educación matemática. *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(núm. especial), 7-21.

Rodríguez Palmero, M.ª L. (2011). La teoría del aprendizaje significativo: una revisión aplicable a la escuela actual. *IN. Revista Electrònica d'Investigació i Innovació Educativa i Socioeducativa*, *3*(1), 29-50.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. Editorial Universidad Estatal.

Ruiz-Ramírez, R., García-Cué, J. L. y Pérez-Olvera, M.ª A. (2014). Causas y consecuencias de la deserción escolar en el bachillerato: Caso Universidad Autónoma de Sinaloa. *Ra Ximhai*, *10*(5), 51-74.

Sánchez-Balarezo, R. W. y Borja-Andrade, A. M. (2022). Geogebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Dominio de las Ciencias*, *8*(2), 33-52.

Sánchez Moreno, A., Jaimes Gómez, O. y Aguilera Terrats, J. R. (2020). La enseñanza basada en preguntas: la ley de Ampère y el término de Maxwell. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*, *38*, 115-132. https://doi.org/10.7203/DCES.38.15427

SEP. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral: plan y programas de estudio para la educación*. https://www.gob.mx/sep/articulos/aprendizajes-clave-para-la-educacion-integral

Steinbring, H. (2005). Do mathematics symbols serve to describe or construct reality? En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 91-104). Springer.

Trujillo Tovar, S. A. y Martínez Trujillo, O. I. (2010). *Acercamiento histórico al trabajo de Diofanto* (Tesis de licenciatura). Universidad Surcolombiana, Neiva, Colombia.

Urbano Meneses, R. A. (2010). Geometría en las esculturas del Parque Arqueológico de San Agustín. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *3*(1), 45-66.

Velarde, A. (2002). Relatividad y el espacio-tiempo: una introducción para estudiantes de colegio. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, *24*(3), 262-277.

Zaragoza, G. N., López, S. R. y Díaz, R. J. (2006). Construyendo modelos didácticos virtuales de sólidos de revolución utilizando SolRev. *Ingeniería*, *10*(3), 53-59.

Zea Saldarriaga, C. A. (2012). *La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Colombia.

Alberto Sánchez Moreno. Físico y maestro en Ciencias (Física) por la Universidad Nacional Autónoma de México y Doctor en Ciencias (Física) por Universidad Autónoma Metropolitana (México). Sus áreas de investigación son las soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein, los modelos cosmológicos en supergravedad, geometrotermodinámica y la enseñanza de la física y las matemáticas. Ha impartido asignaturas de Física y Matemáticas a nivel medio superior, superior y posgrado. Actualmente, es profesor investigador de tiempo completo en el Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica (institución perteneciente al Tecnológico Nacional de México).

Raquel Cárdenas Collazo. Maestra en Docencia en Educación Superior por la Universidad Autónoma de Tamaulipas (México) y especialista en Tecnologías de la Información para el Aprendizaje por el Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica (México). Fue jefa de proyectos de docencia, asesora de orientación educativa, coordinadora del Proyecto de Comunicación con Padres de Familia, coordinadora del Programa de Desarrollo Humano Integral y coordinadora de Orientación Educativa del Departamento de Desarrollo Académico del Instituto Tecnológico de Ciudad Madero (México). Actualmente, es profesora de educación superior de tiempo completo, adscrita al área de Ciencias Básicas del Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica (institución perteneciente al Tecnológico Nacional de México).

Ana Karen Coronel Ruiz. Ingeniera Industrial por el Instituto Tecnológico de Querétaro (México). Especialista en Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias Básicas por el Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica (México). Cuenta con estudios de maestría en Intervención Pedagógica por la Universidad Pedagógica Nacional (México). Entre 2017 y 2022 fue maestra de Matemáticas a nivel de secundaria. Actualmente, es maestra de Matemáticas en la Universidad Tecnológica de Querétaro.

Isaac Hernández Renovato. Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica por la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional (México). Maestro en Docencia en Educación Superior por la Universidad Autónoma de Tamaulipas (México). Maestro en Ciencias en Enseñanza de las Ciencias y especialista en Tecnologías de la Información para el Aprendizaje por el Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica (México). Trabajó como ingeniero en sistemas de control del Departamento de Control de Procesos de la Siderúrgica Lázaro Cárdenas «Las Truchas» en Michoacán (México). Actualmente, es profesor de Educación Superior de tiempo completo, adscrito al área de Ciencias Básicas, en el Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica (institución perteneciente al Tecnológico Nacional de México).

Contribución de autores. Idea: A. S. M., R. C. C., A. K. C. R. e I. H. R.; Revisión de literatura (estado del arte): A. S. M., R. C. C., A. K. C. R. e I. H. R.; Metodología: A. S. M., R. C. C., A. K. C. R. e I. H. R.; Discusión y conclusiones: A. S. M., R. C. C., A. K. C. R. e I. H. R.; Redacción (borrador original): A. S. M., R. C. C., A. K. C. R. e I. H. R.; Revisiones finales: A. S. M., R. C. C., A. K. C. R. e I. H. R.